DISTRIBUSI WEIBULL DAN PARETO UNTUK DATA TINGGI GELOMBANG TSUNAMI
(Studi Kasus : Tsunami Aceh 2004)

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Jurusan Matematika

oleh :

MARTA ERDINI
10754000314

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU

2011

DAFTAR ISI

DISTRIBUSI WEIBULL DAN PARETO UNTUK DATA TINGGI GELOMBANG TSUNAMI (STUDI KASUS : TSUNAMI ACEH 2004)

MARTA ERDINI
NIM : 10754000314

Tanggal Sidang : 26 Mei 2011
Periode Wisuda : Juli 2011

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas Akhir ini membahas tentang dua distribusi yaitu Weibull dua parameter dan Pareto, dalam menentukan model distribusi yang sesuai untuk data tinggi gelombang tsunami di Aceh pada 26 Desember 2004. Estimasi parameter yang digunakan adalah metode maksimum *likelihood* dan menggunakan uji kebaikan (*Goodness of Fit*) Kolmogorov-Smirnov (D) dan Anderson-Darling (A^2). Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa, model distribusi Pareto lebih sesuai dibandingkan dengan distribusi Weibull dua parameter untuk data tinggi gelombang tsunami di Aceh, karena model distribusi Pareto menunjukkan lebih mendekati kurva normal.

Kata Kunci : Data Tinggi Gelombang Tsunami, Distribusi Pareto, Distribusi Weibull, *Goodness of Fit*, Metode Maksimum *Likelihood*.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aceh merupakan salah satu provinsi di Indonesia yang mengalami bencana tsunami yang terjadi pada 26 Desember 2004, pukul 7:58:53 di sebelah bagian barat pantai Sumatera Utara. Kejadian tersebut disebabkan adanya gempa bumi tektonik berkekuatan 8,5 skala rikhter yang berpusat di Samudera Hindia pada 2,9 LU dan 95,6 BT di kedalaman 20 km. Tsunami tersebut menghasilkan tinggi gelombang melebihi 30 meter. Tsunami yang terjadi di Aceh telah menelan korban lebih dari 220.000 jiwa penduduk Indonesia (BMKG Pekanbaru, 2004).

Tsunami juga menghancurkan daratan dan apa saja yang dilaluinya, seperti bangunan, tumbuh-tumbuhan, serta menyebabkan genangan, kerusakan pantai, pencemaran air asin lahan pertanian, tanah dan air bersih. Besarnya ketinggian gelombang tsunami yang terjadi mengakibatkan sebagian kota hancur (Prager, 2006).

Permasalahan yang paling umum yaitu kurangnya persiapan informasi dalam memberikan peringatan awal terjadinya tsunami, daerah yang sulit dijangkau, kurangnya biaya, serta dibutuhkan waktu yang cukup lama untuk menjangkau daerah bencana. Hal ini menjadi alasan untuk menggunakan metode statistik yang tepat untuk memodelkan bentuk distribusi data tinggi gelombang tsunami dalam menafsirkan akibat-akibat yang terjadi dari fenomena tersebut (Choi, 2002).

Banyaknya permasalahan yang disebabkan oleh tsunami, membuat banyak peneliti menjadikan tsunami sebagai topik dalam penelitiannya, yaitu data tinggi gelombang tsunami dapat dimodelkan dalam Matematika dengan menggunakan distribusi statistik yang sesuai untuk data tersebut. Choi, dkk (2002) dalam penelitiannya menggunakan distribusi Lognormal dan Weibull untuk menentukan distribusi yang sesuai untuk data tinggi gelombang tsunami yang terjadi di Laut

Jepang Timur. Hasil dari penelitiannya menyatakan bahwa distribusi yang sesuai untuk memodelkan data tersebut adalah distribusi Log-normal.

Dan’azumi, dkk (2010) dalam penelitiannya menggunakan distribusi Pareto, Exponensial, Beta dan Gamma untuk menentukan distribusi yang sesuai untuk data intensitas curah hujan di Malaysia. Hasil dari penelitiannya menyatakan bahwa distribusi Pareto adalah distribusi yang sesuai untuk memodelkan data tersebut.

Berdasarkan penelitian-penelitian tersebut, maka penulis tertarik untuk mencari distribusi yang sesuai untuk data tinggi gelombang tsunami di Aceh pada Tahun 2004, dengan judul tugas akhir yaitu **“Distribusi Weibull dan Pareto untuk Data Tinggi Gelombang Tsunami (Studi Kasus: Tsunami Aceh 2004)”**.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

a. Bagaimana menerapkan distribusi Weibull dan Pareto untuk memodelkan data tinggi gelombang tsunami di Aceh pada Tahun 2004.
b. Bagaimana menentukan distribusi yang sesuai antara distribusi Weibull dan Pareto untuk memodelkan data tinggi gelombang tsunami di Aceh pada Tahun 2004.

1.3 Batasan Masalah

Pada tugas akhir ini penulis hanya membatasi pembahasan dalam menentukan distribusi yang sesuai untuk memodelkan data tinggi gelombang tsunami di Aceh pada Tahun 2004 dengan menggunakan dua distribusi yaitu distribusi Weibull dua parameter dan Pareto, estimasi parameter yang digunakan hanya metode maksimum *likelihood* saja dan uji kebaikan yang digunakan hanya uji Kolmogorov-Smirnov dan Anderson-Darling.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah :

a. Menerapkan distribusi Weibull dan Pareto untuk memodelkan data tinggi gelombang tsunami di Aceh pada Tahun 2004.
b. Memperoleh distribusi yang sesuai antara distribusi Weibull dan Pareto untuk memodelkan data tinggi gelombang tsunami di Aceh pada Tahun 2004.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

a. Mendapatkan model distribusi yang sesuai untuk data tinggi gelombang tsunami di Aceh pada Tahun 2004.
b. Dapat dijadikan referensi bagi pembaca yang ingin melakukan penelitian berikutnya.
c. Penelitian ini juga dapat membantu instansi yang memerlukan gambaran model distribusi tinggi gelombang tsunami yang terjadi di Aceh pada Tahun 2004.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam tugas akhir ini terdiri dari beberapa bab, yaitu sebagai berikut :

BAB I : Pendahuluan

Bab ini berisikan latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II : Landasan Teori

Bab ini berisikan landasan teori yang berkaitan dengan penyelesaian hasil tugas akhir, seperti distribusi peluang, rataan distribusi peluang, variansi distribusi peluang, distribusi Weibull, distribusi Pareto, estimasi parameter, uji kebaikan (*Goodness of Fit*) dan penelitian-penelitian yang terkait dengan model distribusi.

BAB III : Metodologi Penelitian

Bab ini berisikan tentang jenis dan sumber data serta metode analisis data yang digunakan penulis dalam menyelesaikan penelitian ini.

BAB IV : Pembahasan dan Hasil

Bab ini berisikan tentang distribusi Weibull dan Pareto yang akan digunakan untuk menentukan distribusi yang sesuai dalam memodelkan data tinggi gelombang tsunami di Aceh pada Tahun 2004.

BAB V : Penutup

Bab ini berisikan kesimpulan dari keseluruhan pembahasan dan saran-saran untuk pembaca.

BAB II
LANDASAN TEORI

Bab ini berisikan penjelasan mengenai distribusi peluang, rataan distribusi peluang, variansi distribusi peluang, distribusi Weibull, distribusi Pareto, estimasi parameter, uji kebaikan (*Goodness of Fit*) dan penelitian-penelitian yang terkait dengan model distribusi.

2.1 Distribusi Peluang

Definisi 2.1 (Walpole & Myers, 1989) Himpunan pasangan terurut $(x, f(x))$ merupakan suatu fungsi kepadatan peluang, fungsi massa peluang atau distribusi peluang peubah acak diskrit X bila untuk setiap kemungkinan hasil x :

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum_x f(x) = 1$ (2.1)
3. $P(X = x) = f(x)$

Definisi 2.2 (Walpole & Myers, 1989) Fungsi $f(x)$ adalah fungsi kepadatan peluang peubah acak kontinu X, yang didefinisikan pada himpunan semua bilangan real R, bila :

1. $f(x) \geq 0$, untuk semua $x \in R$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (2.2)
3. $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$

2.2 Rataan Distribusi Peluang

Nilai harapan atau rataan dari suatu peubah acak merupakan salah satu ukuran pemusatan data populasi yang terpenting. Nilai rata-rata atau rataan peubah acak X atau rataan distribusi peluang X dan ditulis sebagai μ_X atau μ. Rataan ini disebut juga oleh para statistikawan dengan nilai harapan matematik atau nilai harapan peubah acak X dan dinyatakan dengan $E(X)$ (Walpole & Myers, 1989).

Definisi 2.3 (Walpole & Myers, 1989) Diberikan X adalah variabel acak dengan fungsi kepadatan peluang $f(X)$. Nilai harapan atau rataan X adalah :

$\mu = E(X) = \sum_x x f(x)$, bila X diskrit (2.3)

$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)\ dx$, bila X kontinu (2.4)

Metode yang diuraikan di atas menunjukkan bahwa rataan atau nilai harapan setiap peubah acak diskrit dapat dihitung dengan mengalikan tiap nilai $x_1, x_2, \dots, x_n$ dari peubah acak X dengan peluang padanannya $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ dan kemudian dijumlahkan hasilnya. Bila peubah acaknya kontinu, definisi nilai harapan matematik pada dasarnya masih tetap sama, yaitu dengan mengganti penjumlahan dengan integral (Walpole & Myers, 1989).

2.3 Variansi Distribusi Peluang

Rataan atau nilai harapan suatu peubah acak X memiliki peran khusus dalam statistika karena menggambarkan keterangan cukup mengenai bentuk distribusi peluang. Ukuran keragaman terpenting suatu peubah acak X diperoleh dengan mengambil $g(X) = (X - \mu)^2$, karena pentingnya dalam statistika maka diberi nama variansi peubah acak X atau variansi distribusi peluang X dan dinyatakan dengan $Var(X)$ atau ${\sigma_x}^2$ atau σ^2. Selanjutnya $Var(X)$ akan digunakan untuk menyatakan variansi dari distribusi peluang X (Dudewicz & Misra, 1988).

Definisi 2.4 (Dudewicz & Misra, 1988) Diberikan X adalah peubah acak dengan distribusi peluang $f(x)$ dan rataan μ. Variansi X adalah :

$Var(X) = E[(X - \mu)^2] = \sum_x (X - \mu)^2 f(x)$, bila X diskrit (2.5)

$Var(X) = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu)^2 f(x) dx$, bila X kontinu (2.6)

Teorema 2.1 (Dudewicz & Misra, 1988) Variansi dari peubah acak X adalah :

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \tag{2.7}$$

Bukti :

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[(X-\mu)]^2 \\ &= E[(X^2 - 2\mu X + \mu^2)] \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

2.4 Distribusi Weibull

Distribusi Weibull diambil dari nama seorang fisikawan yang berasal dari Swedia bernama Waloddi Weibull pada Tahun 1939. Distribusi Weibull merupakan distribusi yang sering digunakan karena menggambarkan keseluruhan data secara jelas terutama dalam pengujian dan memodelkan data, sehingga distribusi Weibull sering diaplikasikan untuk pemodelan antara lain pemodelan dibidang teknologi, kecepatan angin, unsur-unsur kimia dan juga dibidang hidrologi. Karakteristik dari distribusi Weibull yaitu dicirikan oleh dua parameter yaitu α dan β, dimana $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$ (Rinne, 2009).

Distribusi Weibull termasuk distribusi acak kontinu yang juga mempunyai fungsi kepadatan peluang sebagai berikut :

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\left({x}/{\beta}\right)^\alpha}, \ x \geq 0 \tag{2.8}$$

sedangkan fungsi distribusi kumulatifnya adalah :

$$F(x, \alpha, \beta) = 1 - e^{-\left({x}/{\beta}\right)^\alpha} \tag{2.9}$$

kemudian rata-rata dan variansi dari distribusi Weibull adalah :

$$E(X) = \beta\Gamma\left({1}/{\alpha} + 1\right) \text{ dan } Var(X) = \beta^2 \left[\Gamma\left({2}/{\alpha} + 1\right) - \left(\Gamma\left({1}/{\alpha} + 1\right)\right)^2\right] \tag{2.10}$$

Setiap distribusi harus memenuhi syarat suatu fungsi kepadatan peluang. Adapun syarat suatu fungsi $f(x)$ yang kontinu memenuhi suatu fungsi kepadatan peluang adalah (Walpole & Myers, 1989) :

1. $f(x) \geq 0, \forall x$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Definisi 2.5 (Walpole & Myers, 1989) Fungsi distribusi kumulatif variabel X dinotasikan sebagai F_X dan didefinisikan sebagai $F_X(x) = p(X \leq x)$ untuk seluruh x yang riil. Jika X adalah kontinu, maka :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \qquad (2.11)$$

Definisi 2.6 (Walpole & Myers, 1989) Variabel acak X dikatakan memiliki distribusi gamma dengan parameter $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$ jika dan hanya jika fungsi kepadatan peluang dari X adalah :

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}, \quad 0 \leq x < \infty \qquad (2.12)$$

dengan :

$$\Gamma(\alpha) = \int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \qquad (2.13)$$

Kuantitas $\Gamma(\alpha)$ dikenal dengan fungsi gamma. Integral secara langsung akan menghasilkan $\Gamma(1) = 1$. Secara terus-menerus integral akan menghasilkan bahwa $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$ untuk $\alpha > 1$, dan juga $\Gamma(n) = (n - 1)!$ yang dihasilkan jika n adalah bilangan bulat. Pembuktian persamaan (2.13) dapat ditunjukkan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha) &= \int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\
&= \left[-x^{\alpha-1} e^{-x}\right]_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} (\alpha - 1)\, x^{\alpha-2} e^{-x} dx \\
&= (\alpha - 1) \int_{0}^{\infty} x^{\alpha-2} e^{-x} dx \\
&= (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1) \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

2.5 Distribusi Pareto

Distribusi Pareto diambil dari nama seorang pakar ekonomi Italia bernama Vilfredo Pareto. Distribusi Pareto digunakan untuk pemodelan di bidang hidrologi, yaitu pemodelan banjir atau kejadian hidrologi yang ekstrim. Selain itu, distribusi ini juga digunakan dalam pemodelan frekuensi atau data dengan model gelombang dalam probabilitas rapat kepadatan. Distribusi Pareto dicirikan oleh dua parameter yaitu α dan k (Krishnamoorthy, 2006).

Distribusi Pareto juga termasuk distribusi acak kontinu yang juga mempunyai fungsi kepadatan peluang sebagai berikut :

$$f(x,\alpha,k)=\frac{\alpha k^{\alpha}}{x^{\alpha+1}};\quad k\le x<\infty;\ \alpha,k>0 \tag{2.15}$$

sedangkan fungsi distribusi kumulatifnya adalah :

$$F(x,\alpha,k)=1-\left(\frac{k}{x}\right)^{\alpha};\quad k\le x<\infty;\ \alpha,k>0 \tag{2.16}$$

kemudian rata-rata dan variansi dari distribusi Pareto adalah :

$$E(X)=\frac{\alpha k}{(\alpha-1)}\quad \text{dan}\quad Var(X)=\frac{\alpha k^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \tag{2.17}$$

2.6 Estimasi Parameter

Dalam menentukan model distribusi yang sesuai untuk suatu data, terlebih dahulu ditentukan parameter dari distribusi tersebut. Metode yang digunakan salah satunya adalah metode maksimum *likelihood*. Metode maksimum *likelihood* sering digunakan dalam penelitian karena prosedur atau langkah-langkahnya sangat jelas dan sesuai dalam menentukan parameter dari sebuah distribusi (Krishnamoorthy, 2006).

2.6.1 Fungsi *Likelihood*

Fungsi kepadatan peluang (FKP) bersama dari variabel acak $x_1,x_2,\dots,x_n$ yaitu $f(x_1,x_2,\dots,x_n;\ \theta)$ yang dievaluasi pada titik $x_1,x_2,\dots,x_n$ yang disebut fungsi *likelihood* yang dinotasikan dengan $L(\theta;X)$ maka :

$$L(\theta; X) = f(X; \theta) \tag{2.18}$$

karena $f(x_1, x_2, \dots, x_n;\ \theta)$ adalah FKP bersama dari variabel acak yang saling bebas, sehingga :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \dots f(x_n; \theta) \tag{2.19}$$

Selanjutnya persamaan (2.19) disubsitusikan ke persamaan (2.18), maka (Lee & Wang, 2003) :

$$\begin{aligned} L(\theta; X) &= f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \dots f(x_n; \theta) \\ &= \textstyle\prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta) \end{aligned} \tag{2.20}$$

Contoh 2.1 Misalkan X memiliki FKP sebagai berikut :

$$f(x; \theta) = \theta X^{\theta - 1}, \qquad 0 < x < 1, 0 < \theta < \infty$$

Jika $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah sampel acak dari distribusi tersebut, tentukanlah fungsi *likelihood* dari θ.

Penyelesaian :

Untuk menentukan fungsi *likelihood* digunakan persamaan (2.20), sehingga diperoleh fungsi *likelihood*nya adalah :

$$\begin{aligned} L(\theta; X) &= f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \dots f(x_n; \theta) \\ &= \theta {X_1}^{\theta - 1} . \theta {X_2}^{\theta - 1} \dots \theta {X_n}^{\theta - 1} \\ &= \theta^n \textstyle\prod_{i=1}^{n} {X_i}^{\theta - 1} \end{aligned}$$

2.6.2 Estimasi Maksimum *Likelihood*

Estimasi Maksimum *Likelihood* (EML) adalah suatu metode yang memaksimumkan fungsi *likelihood*. Prinsip estimasi maksimum *likelihood* adalah memilih $\hat{\theta}$ sebagai estimator titik untuk θ yang memaksimumkan $L(\theta; X)$. Metode EML dapat digunakan jika fungsi kepadatan peluang (FKP) atau distribusi dari variabel acak diketahui.

Misalkan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah sampel acak dari suatu distribusi dengan FKP $f(X;\theta)$, kemudian dibentuk FKP bersama $x_1, x_2, \ldots, x_n$, setelah itu ditentukan fungsi *likelihood* dari θ yaitu $L(\theta; X)$.

Metode estimasi maksimum *likelihood* membuat fungsi *likelihood* $L(\theta; X)$ menjadi maksimum dan digunakan fungsi logaritma. Sehingga fungsi logaritma *likelihood* dinotasikan dengan $\ln L(\theta; X) = l(\theta; X)$, dimana $l(\hat{\theta}; X) \geq l(\theta; X)$. Dengan menggunakan logaritma $L(\theta; X)$, maka estimator *likelihood* diperoleh dari turunan fungsi *likelihood* terhadap parameternya, yaitu $\frac{dl(\theta;X)}{d\theta} = 0$ (Lee & Wang, 2003).

Contoh 2.2 Dari contoh (2.1) diketahui fungsi *likelihood* sebagai berikut :

$$L(\theta; X) = \theta^n \prod_{i=1}^{n} X_i^{\theta-1}$$

dari fungsi tersebut, tentukanlah estimator dari $\hat{\theta}$.

Penyelesaian :

Untuk menentukan estimator dari $\hat{\theta}$, maka kita harus menjadikan fungsi *likelihood* tersebut menjadi logaritma *likelihood* atau $\ln L(\theta; X) = l(\theta; X)$, yaitu :

$$\begin{aligned}
l(\theta; X) &= \ln \theta^n \textstyle\prod_{i=1}^{n} X_i^{\theta-1} \\
&= \ln \theta^n + \ln(\textstyle\prod_{i-1}^{n} X_i^{\theta-1}) \\
&= \ln \theta^n + \ln X_1^{\theta-1} + \ln X_2^{\theta-1} + \cdots + \ln X_n^{\theta-1} \\
&= n \ln \theta + \theta - 1 \ln X_1 + \theta - 1 \ln X_2 + \cdots + \theta - 1 \ln X_n \\
&= n \ln \theta + (\theta - 1) \textstyle\sum_{i=1}^{n} \ln X_i \\
&= n \ln \theta + \theta \textstyle\sum_{i=1}^{n} \ln X_i - \textstyle\sum_{i=1}^{n} \ln X_i
\end{aligned}$$

karena ,

$$\frac{dl(\theta;X)}{d\theta} = 0$$

sehingga ,

$$\frac{n}{\theta} + \textstyle\sum_{i=1}^{n} \ln X_i = 0$$

$$\frac{n}{\theta} = -\textstyle\sum_{i=1}^{n} \ln X_i$$

$$\theta = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}$$

maka estimator maksimum *likelihood* untuk $\hat{\theta} = \theta$, dimana $\theta = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}$.

2.6.3 Metode Newton-Raphson untuk Menghampiri Nilai Parameter

Metode Newton-Raphson adalah proses iterasi yang dilakukan dalam metode numerik yang dapat digunakan untuk mencari solusi atau pemecahan suatu persamaan. Proses iterasi adalah suatu teknik penghampiran yang dilakukan secara berulang-ulang, dimana setiap pengulangan disebut iterasi. Pada umumnya para ahli statistik sering menggunakan metode Newton-Raphson untuk menghampiri nilai parameter dari suatu persamaan (Yendra, 2010).

Metode Newton-Raphson untuk mencari pemecahan dari $x_1, x_2, \dots, x_p$ sehingga :

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$$
$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$$
$$\vdots$$
$$f_p(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$$

kemudian misalkan a_{ij} adalah turunan parsial dari f_i terhadap x_j atau dapat ditulis sebagai $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

Selanjutnya dibentuk ke dalam sebuah matriks yang disebut dengan matriks Jacobian, yaitu :

$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix} \qquad (2.21)$$

kemudian dicari invers dari persamaan (2.21), yaitu :

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & a_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix} \qquad (2.22)$$

selanjutnya misalkan $x_1^k, x_2^k, \ldots, x_p^k$ adalah nilai-nilai hampiran pada iterasi ke k, dan misalkan $f_1^k, f_2^k, \ldots, f_p^k$ adalah nilai-nilai yang berhubungan dengan fungsi $f_1, f_2, \ldots, f_p$, yaitu :

$$f_1^k = f_1(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_p^k)$$
$$f_2^k = f_2(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_p^k)$$
$$\vdots$$
$$f_p^k = f_p(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_p^k)$$

dan misalkan b_{ij}^k adalah elemen dari J^{-1} yang dihasilkan pada $x_1^k, x_2^k, \ldots, x_p^k$, maka hampiran iterasi selanjutnya dapat dibentuk secara umum, yaitu :

$$\begin{aligned}
x_1^{k+1} &= x_1^k - \left(b_{11}^k f_1^k + b_{12}^k f_2^k + \cdots + b_{1p}^k f_p^k\right) \\
x_2^{k+1} &= x_2^k - \left(b_{21}^k f_1^k + b_{12}^k f_2^k + \cdots + b_{2p}^k f_p^k\right) \\
&\vdots \\
x_p^{k+1} &= x_p^k - \left(b_{p1}^k f_1^k + b_{p2}^k f_2^k + \cdots + b_{pp}^k f_p^k\right)
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Proses iterasi dapat dimulai dengan penentuan nilai-nilai awal terlebih dahulu. Nilai awal dapat dicari salah satunya dengan menghampiri fungsi kumulatif dan membentuk persamaan regresi linier sederhana. Selanjutnya, proses iterasi dapat dihentikan jika iterasi yang diperoleh menghasilkan nilai yang sama dengan iterasi sebelumnya (Yendra, 2010).

2.7 Uji Kebaikan (*Goodness of Fit*)

Secara umumnya, uji kebaikan (*Goodness of Fit*) adalah uji yang dilakukan untuk memperoleh model distribusi yang sesuai terhadap data observasi yang digunakan dalam sebuah penelitian. Uji kebaikan digunakan berdasarkan fungsi distribusi kumulatif secara lengkap dengan parameter-parameter yang telah ditentukan. Pada penelitian ini, model distribusi yang sesuai untuk data akan ditentukan dengan menggunakan uji Kolmogorov-Smirnov (D) dan Anderson-Darling (A^2) (Thode, 2002).

2.7.1 Uji Kolmogorov-Smirnov

Uji statistik Kolmogorov-Smirnov ditunjukkan pada persamaan berikut :

$$D = \max\,[D^{+},\ D^{-}] \tag{2.24}$$

dimana,

$$D^{+} = \max_{i=1\ldots,n}\left[\frac{i}{n} - F(x_i)\right] \tag{2.25}$$

dan,

$$D^{-} = \max_{i=1\ldots,n}\left[F(x_i) - \frac{(i-1)}{n}\right] \tag{2.26}$$

dengan $F(x_i)$ adalah fungsi distribusi kumulatif. Nilai D berdasarkan pada jarak maksimum antara D^{+} dan D^{-}. Model distribusi dikatakan sesuai untuk data jika uji statistik D pada suatu model distribusi tersebut bernilai minimum (Thode, 2002).

2.7.2 Uji Anderson-Darling

Uji Anderson-Darling ditunjukkan pada persamaan berikut :

$$A^2 = -n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\begin{bmatrix}(2i-1)\ln F(x_i) + \\ (2n+1-2i)\ln\big(1 - F(x_i)\big)\end{bmatrix} \tag{2.27}$$

dengan $F(x_i)$ adalah fungsi distribusi kumulatif. Model distribusi dikatakan sesuai untuk data jika uji statistik A^2 pada suatu model distribusi tersebut bernilai minimum (Pani, 2009).

2.8 Penelitian-penelitian yang Terkait dengan Model Distribusi

Penelitian-penelitian yang berhubungan dengan model distribusi yang pernah diteliti sebelumnya, antara lain :

Tabel 2.1 Penelitian-penelitian Model Distribusi

No.	Judul Penelitian	Peneliti	Metode	Tahun
1.	*Modeling the Distribution of Rainfall Intensity Using Hourly Data*	Salisu Dan'azumi, dkk	*Pareto*, *Exponensial*, *Beta*, dan *Gamma Distribution*	2010

2.	*Fitting of Statistical Distributions to Wind Speed Data in Malaysia*	Azami Zaharim, dkk	*Weibull* dan *Lognormal Distribution*	2009
3.	*The Suitability of Statistical Distribution in Fitting Wind Speed Data*	Azami Zaharim, dkk	*Weibull* dan *Rayleigh Distribution*	2008
4.	*Fitting Daily Rainfall Amount in Malaysia Using the Normal Transform Distribution*	Jamaludin Suhaila dan Abdul Aziz Jemain	*Normal Transform Distribution*	2007
5.	*Use of The Gamma Distribution to Represent Monthly Rainfall in Africa for Drought Monitoring Applications*	Gregory J. Husak, dkk	*Gamma Distribution*	2007
6.	*On The Appropriateness of The Gumbel Distribution in Modelling Extreme Rainfall*	Demetris Koutsoyiannis	*Gumbel Distribution*	2003
7.	*Distribution Functions of Tsunami Wave Heights*	Byung Ho Choi, dkk	*Lognormal* dan *Power Distribution*	2002
8.	*Forecasting the Heights of Later Wave in Pacific-Wide Tsunamis*	Harold O. Mofjeld, dkk	*Forecasting*	2000

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini adalah studi pustaka dengan mempelajari literatur-literatur yang berhubungan dengan pokok permasalahan. Pada bab ini juga dijelaskan mengenai jenis dan sumber data serta metode analisis data.

3.1 Jenis dan Sumber Data

a. Jenis Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data tinggi gelombang tsunami di Aceh pada tahun 2004 dan dapat dilihat pada Lampiran A.

b. Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini tidak diambil secara langsung dari lapangan. Karena belum tersedianya data di Indonesia, peneliti mengambil data yang sudah ada (dicatat) oleh Tsunami *Laboratory*, *Novosibirsk*, Universiti Kebangsaaan Malaysia (UKM). Hal ini disebabkan karena masih kurangnya sarana dan prasarana alat pendeteksi gelombang tsunami di Indonesia. Adapun data yang dihasilkan adalah 107 data tinggi gelombang tsunami dalam m/s.

3.2 Metode Analisis Data

Penelitian dalam tugas akhir ini juga menggunakan *software* statistik yaitu *Easyfit*. Langkah-langkah yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut :

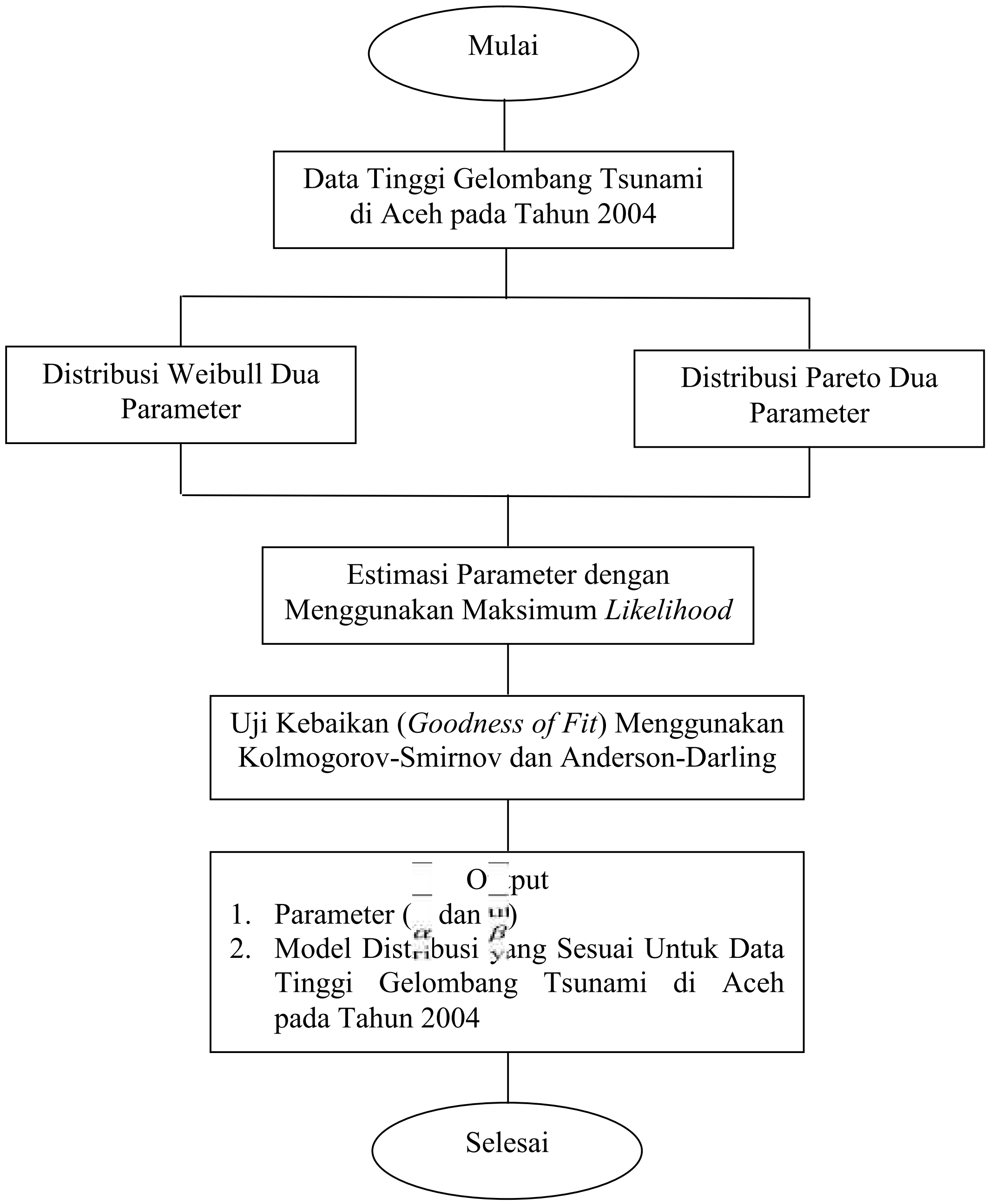
Langkah 1 : Mengumpulkan data, kemudian data diorganisir dan data siap untuk dianalisis.

Langkah 2 : Menentukan parameter dari distribusi Weibull dan Pareto dengan menggunakan metode maksimum *likelihood*.

Langkah 3 : Menguji kebaikan (*Goodness of Fit*) dari distribusi tersebut dengan menggunakan uji Kolmogorov-Smirnov dan Anderson-Darling.

Langkah 4 : Menetapkan distribusi yang sesuai berdasarkan uji yang telah dilakukan pada langkah 3.

Langkah-langkah di atas juga dapat dilihat pada *flowchart* berikut ini :



Gambar 3.1 ***Flowchart*** **Metodologi Penelitian**

BAB IV

PEMBAHASAN DAN HASIL

Bab ini berisikan tentang rata-rata dan variansi dari distribusi Weibull dan Pareto, estimasi parameter menggunakan metode maksimum *likelihood*, menentukan nilai parameter, model distribusi untuk data tinggi gelombang tsunami di Aceh Tahun 2004 serta hasil uji kebaikan (*Goodness of Fit*) dari kedua distribusi.

4.1 Rata-rata dan Variansi

a. Distribusi Weibull

Distribusi Weibull termasuk distribusi acak kontinu yang juga mempunyai fungsi kepadatan peluang yang ditunjukkan pada persamaan (2.8). Setiap distribusi harus memenuhi suatu syarat fungsi kepadatan peluang, seperti yang dijelaskan pada bab II sebelumnya.

Akan ditunjukkan apakah fungsi kepadatan peluang pada persamaan (2.8) memenuhi syarat suatu fungsi kepadatan peluang, yaitu :

1. $f(x) \geq 0, \forall x$

   $f(x, \alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\left(x/\beta\right)^\alpha}$; $x \geq 0$, maka terbukti bahwa $f(x) \geq 0, \forall x$

2. $\int_{-\alpha}^{\infty} f(x)dx = 1$

   Bukti :

   $$\int_0^{\alpha} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha} dx = 1$$

misalkan :

$$u = \left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha$$

$$du = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} dx$$

$$\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha-1} du = dx$$

maka :

$$\int_0^{\infty} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-u} \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha-1} du = 1$$

$$\int_0^{\infty} e^{-u}\, du = 1$$

$$\left(-e^{-u}\right)_0^{\infty} = 1$$

$$0 - \left(-e^{0}\right) = 1$$

$$1 = 1 \qquad \blacksquare$$

Selanjutnya akan ditunjukkan fungsi distribusi kumulatif untuk distribusi Weibull pada persamaan (2.9) berdasarkan definisi (2.5) persamaan (2.11), sebagai berikut :

$$F(t) = \int_0^{x} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha} dt$$

misalkan :

$$u = \left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha$$

$$du = \alpha\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1} . \frac{1}{\beta} dt$$

$$du = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1} dt$$

$$\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\alpha-1} du = dt$$

sehingga,

$$F(t) = \int_0^{x} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t^{\alpha-1} e^{-u} \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\alpha-1} du$$

$$= \int_0^{x} e^{-u}\, du$$

$$= \left(-e^{-u}\right)_0^{x}$$

$$= \left(-e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha}\right)_0^{x}$$

$$= -e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha} + 1$$

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha} \qquad \blacksquare \qquad (4.1)$$

Selanjutnya akan ditunjukkan rata-rata distribusi Weibull dua parameter pada persamaan (2.10) berdasarkan definisi (2.3) persamaan (2.4). Rata-rata atau $E(X)$ dari distribusi Weibull adalah :

$$E(X) = \int_{-\alpha}^{\infty} x \ f(x) \ dx$$

$$E(X) = \int_{-\alpha}^{\infty} x \ \frac{\alpha}{\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}} \ dx$$

$$= \int_{-\alpha}^{\infty} \ \frac{\alpha}{\beta^{\alpha}} x^{\alpha} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}} \ dx$$

misalkan :

$$\theta = \beta^{\alpha}$$

$$z = x^{\alpha}$$

$$z^{\frac{1}{\alpha}} = x$$

$$dx = \frac{1}{\alpha} z^{\frac{1}{\alpha}-1} dz$$

maka :

$$E(X) = \int_{0}^{\infty} \ \frac{\alpha}{\theta} z e^{-\left(\frac{z}{\theta}\right)} \frac{1}{\alpha} z^{\frac{1}{\alpha}-1} dz$$

$$= \int_{0}^{\alpha} \ \frac{1}{\theta} e^{-\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)} z^{\frac{1}{\alpha}} dz$$

$$= \int_{0}^{\alpha} \ \frac{1}{\theta} e^{-\left(\frac{z}{\theta}\right)} z^{\frac{1}{\alpha}} \ \frac{\theta^{\frac{1}{\alpha}+1} \Gamma(\frac{1}{\alpha}+1)}{\theta^{\frac{1}{\alpha}+1} \Gamma(\frac{1}{\alpha}+1)} dz$$

$$= \frac{\theta^{\frac{1}{\alpha}+1} \Gamma(\frac{1}{\alpha}+1)}{\theta} \int_{0}^{\alpha} \ \frac{e^{-\left(\frac{z}{\theta}\right)} z^{\frac{1}{\alpha}}}{\theta^{\frac{1}{\alpha}+1} \Gamma(\frac{1}{\alpha}+1)} \ dz$$

dengan,

$$\int_{0}^{\alpha} \ \frac{e^{-\left(\frac{z}{\theta}\right)} z^{\frac{1}{\alpha}}}{\theta^{\frac{1}{\alpha}+1} \Gamma(\frac{1}{\alpha}+1)} \ dz = 1$$

sehingga,

$$E(X) = \frac{\theta^{\frac{1}{\alpha}+1} \Gamma(\frac{1}{\varepsilon}+1)}{\theta} .1$$

$$= \frac{\theta^{\frac{1}{\alpha}+1} \Gamma(\frac{1}{\alpha}+1)}{\theta}$$

dengan $\theta = \beta^{\alpha}$, maka :

$$E(X) = \theta^{\frac{1}{\alpha}}\Gamma(\frac{1}{\alpha}+1)$$
$$= \beta\Gamma(\frac{1}{\alpha}+1) \qquad (4.2)$$

Berikut ini akan ditunjukkan variansi distribusi Weibull dengan menggunakan persamaan (2.7), yaitu :

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Terlebih dahulu akan ditentukan :

$$E(X^2) = \int_{-\alpha}^{\infty} x^2\ f(x)dx$$
$$= \int_0^{\alpha} x^2\ \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}\ dx$$
$$= \int_0^{\alpha} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha+1} e^{\frac{-x^\alpha}{\beta^\alpha}}\ dx$$

misalkan :

$$\theta = \beta^\alpha$$
$$z = x^\alpha$$
$$z^{\frac{1}{\alpha}} = x$$
$$dx = \frac{1}{\alpha} z^{\frac{1}{\alpha}-1} dz$$

sehingga,

$$E(X^2) = \int_0^{\alpha} \frac{\alpha\, z\, z^{\frac{1}{\alpha}}}{\theta} e^{\frac{-z}{\theta}} \cdot \frac{1}{\alpha} z^{\frac{1}{\alpha}-1} dz$$
$$= \int_0^{\alpha} \frac{z^{\frac{2}{\alpha}}}{\theta} e^{\frac{-z}{\theta}}\ dz$$
$$= \int_0^{\alpha} \frac{z^{\frac{2}{\alpha}}}{\theta} e^{\frac{-z}{\theta}}\ \frac{\theta^{\frac{2}{\alpha}+1}\Gamma(\frac{2}{\alpha}+1)}{\theta^{\frac{2}{\alpha}+1}\Gamma(\frac{2}{\alpha}+1)}\ dz$$
$$= \frac{\theta^{\frac{2}{\alpha}+1}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}+1\right)}{\theta} \int_0^{\alpha} \frac{z^{\frac{2}{\alpha}}\ e^{\frac{-z}{\theta}}}{\theta^{\frac{2}{\alpha}+1}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}+1\right)}\ dz$$

dengan,

$$\int_0^{\alpha} \frac{e^{-\left(\frac{z}{\theta}\right)} z^{\frac{2}{\alpha}}}{\theta^{\frac{2}{\alpha}+1}\Gamma(\frac{2}{\alpha}+1)}\ dz = 1$$

sehingga,

$$E(X^2) = \frac{\theta^{\frac{2}{\alpha}+1}\Gamma(\frac{2}{\alpha}+1)}{\theta}.1$$

$$= \frac{\theta^{\frac{2}{\alpha}+1}\Gamma(\frac{2}{\alpha}+1)}{\theta}$$

dengan $\theta = \beta^{\alpha}$, sehingga :

$$E(X^2) = \theta^{\frac{2}{\alpha}}\Gamma(\frac{2}{\alpha}+1)$$

$$= \beta^2\Gamma(\frac{2}{\alpha}+1) \quad (4.3)$$

Substitusikan persamaan (4.2) dan (4.3) ke persamaan (2.7), maka diperoleh variansi distribusi Weibull, yaitu :

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \beta^2\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}+1\right) - \left(\left(\beta\Gamma(\frac{1}{\alpha}+1)\right)\right)^2$$

$$= \beta^2\left[\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}+1\right) - \left(\Gamma(\frac{1}{\alpha}+1)\right)^2\right] \quad (4.4)$$

b. Distribusi Pareto

Distribusi Pareto termasuk distribusi acak kontinu yang juga mempunyai fungsi kepadatan peluang yang ditunjukkan pada persamaan (2.15). Akan ditunjukkan apakah fungsi kepadatan peluang pada persamaan (2.15) memenuhi syarat suatu fungsi kepadatan peluang, yaitu :

1. $f(x) \geq 0, \forall x$

   $f(x, \alpha, k) = \frac{\alpha k^{\alpha}}{x^{\alpha+1}};\ k \leq x < \infty;\ \alpha, k > 0$, maka terbukti bahwa $f(x) \geq 0, \forall x$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

   Bukti :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, \alpha, k)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha k^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{k} \frac{\alpha k^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}\,dx + \int_{k}^{\infty} \frac{\alpha k^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}\,dx$$

$$= 0 + \int_{k}^{\infty} \frac{\alpha k^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}\,dx$$

$$= \alpha k^{\alpha} \int_{k}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}}\, dx$$

$$= \alpha k^{\alpha} \left(-\frac{x}{\alpha\, x^{\alpha+1}}\right)_{k}^{\infty}$$

$$= 1 \qquad \blacksquare$$

Selanjutnya akan ditunjukkan fungsi distribusi kumulatif untuk distribusi Pareto pada persamaan (2.16) berdasarkan definisi (2.5) persamaan (2.11), sebagai berikut :

$$F(t) = \int_{k}^{x} \frac{\alpha k^{\alpha}}{t^{\alpha+1}}\, dt$$

$$= \alpha k^{\alpha} \int_{k}^{x} \frac{1}{t^{\alpha+1}} dt$$

$$= \alpha k^{\alpha} \left(-\frac{t}{\alpha\, t^{\alpha+1}}\right)_{k}^{x}$$

$$= \left[-\frac{t\, k^{\alpha}}{t^{\alpha+1}}\right]_{k}^{x}$$

$$= -\left(\frac{k^{\alpha}}{x^{\alpha}}\right) + 1 = 1 - \left(\frac{k}{x}\right)^{\alpha} \qquad \blacksquare \tag{4.5}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan rata-rata distribusi Pareto pada persamaan (2.17) berdasarkan definisi (2.3) persamaan (2.4). Rata-rata atau $E(X)$ dari distribusi Pareto adalah :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, \frac{\alpha k^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{k} x\, \frac{\alpha k^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}\, dx + \int_{k}^{\infty} x\, \frac{\alpha k^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}\, dx$$

$$= 0 + \int_{k}^{\infty} x\, \frac{\alpha k^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}\, dx$$

$$= \alpha k^{\alpha} \int_{k}^{\infty} \frac{x}{x^{\alpha+1}}\, dx$$

$$= \alpha k^{\alpha} \int_{k}^{\infty} x^{-\alpha}\, dx$$

$$= \alpha k^{\alpha} \left(\frac{1}{-\alpha+1}\, x^{-\alpha+1}\right)_{k}^{\infty}$$

$$= \frac{\alpha k}{(\alpha-1)} \tag{4.6}$$

Berikut akan ditunjukkan variansi distribusi Pareto dengan menggunakan persamaan (2.7), yaitu :

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Terlebih dahulu akan ditentukan :

$$E(X^2) = \int_{-\alpha}^{\infty} x^2 f(x)dx$$
$$= \int_{-\alpha}^{\infty} x^2 \frac{\alpha k^\alpha}{x^{\alpha+1}} dx$$
$$= \int_{-\alpha}^{k} x^2 \frac{\alpha k^\alpha}{x^{\alpha+1}} dx + \int_{k}^{\alpha} x^2 \frac{\alpha k^\alpha}{x^{\alpha+1}} dx$$
$$= 0 + \int_{k}^{\alpha} x^2 \frac{\alpha k^\alpha}{x^{\alpha+1}} dx$$
$$= \alpha k^\alpha \int_{k}^{\infty} \frac{x^2}{x^{\alpha+1}} dx$$
$$= \alpha k^\alpha \left(\frac{1}{-\alpha+2} x^{-\alpha+2}\right)_k^\alpha$$
$$= \frac{\alpha k^2}{\alpha-2} \tag{4.7}$$

Substitusikan persamaan (4.6) dan (4.7) ke persamaan (2.7), maka diperoleh variansi distribusi Pareto, yaitu :

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$
$$= \frac{\alpha k^2}{\alpha-2} - \left(\frac{\alpha k}{\alpha-1}\right)^2$$
$$= \frac{\alpha k^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \tag{4.8}$$

4.2 Estimasi Parameter Menggunakan Metode Maksimum *Likelihood*

Metode maksimum *likelihood* adalah salah satu metode yang digunakan dalam menentukan parameter dari sebuah distribusi. Dalam penelitian ini akan digunakan metode tersebut untuk menentukan parameter dari distribusi Weibull dan Pareto.

a. **Distribusi Weibull**

Parameter dari fungsi kepadatan peluang Weibull (α, β) pada persamaan (2.8) dapat ditunjukkan sebagai berikut :

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\left(x/\beta\right)^{\alpha}}, \quad x \geq 0$$

persamaan di atas dapat dijadikan dalam bentuk berikut :

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}}$$

misalkan :

$$\lambda = \frac{1}{\beta}$$

sehingga,

$$f(x, \alpha, \beta) = \lambda\alpha(\lambda x)^{\alpha-1} e^{-(\lambda x)^{\alpha}}$$

maka fungsi *likelihood* :

$$\begin{aligned}
L &= f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n) \\
&= \lambda\alpha(\lambda x_1)^{\alpha-1} e^{-(\lambda x_1)^{\alpha}} . \lambda\alpha(\lambda x_2)^{\alpha-1} e^{-(\lambda x_2)^{\alpha}} \dots \lambda\alpha(\lambda x_n)^{\alpha-1} e^{-(\lambda x_n)^{\alpha}} \\
&= \lambda^{n} \alpha^{n} \lambda^{n(\alpha-1)} \textstyle\sum_{i=1}^{n} (x_i)^{\alpha-1} \; e^{-\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i)^{\alpha}} \\
&= \lambda^{n\alpha} \alpha^{n} \textstyle\sum_{i=1}^{n} (x_i)^{\alpha-1} \; e^{-\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i)^{\alpha}} \\
&= \left(\frac{1}{\beta}\right)^{n\alpha} \alpha^{n} \textstyle\sum_{i=1}^{n} (x_i)^{\alpha-1} \; e^{\sum_{i=1}^{n} -\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\alpha} (x_i)^{\alpha}}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Setelah diperoleh fungsi *likelihood*, selanjutnya akan ditentukan maksimum *likelihood* dari persamaan di atas dengan menjadikan fungsi *likelihood* tersebut menjadi logaritma *likelihood*, yaitu :

$$\begin{aligned}
l &= \ln L \\
&= \ln\left(\left(\frac{1}{\beta}\right)^{n\alpha} \alpha^{n} \textstyle\sum_{i=1}^{n} (x_i)^{\alpha-1} \; e^{\sum_{i=1}^{n} -\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\alpha} (x_i)^{\alpha}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{\beta}\right)^{n\alpha} + \ln \alpha^{n} + \textstyle\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)^{\alpha-1} - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\alpha} (x_i)^{\alpha} \\
&= n\alpha \ln\left(\frac{1}{\beta}\right) + n \ln \alpha + (\alpha - 1) \textstyle\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\alpha} \sum_{i=1}^{n} (x_i)^{\alpha}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

karena ,

$$\frac{\partial(\alpha, \beta; X)}{\partial \alpha} = 0$$

sehingga,

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + n\ln\left(\frac{1}{\beta}\right) + \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) - \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\alpha}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^{\alpha}\left(\ln\left(\frac{1}{\beta}\right) + \ln(x_i)\right) = 0$$

$$\frac{n}{\alpha} = \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\alpha}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^{\alpha}\left(\ln\left(\frac{1}{\beta}\right) + \ln(x_i)\right) - \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) - n\ln\left(\frac{1}{\beta}\right)$$

$$\alpha = \frac{n}{\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\alpha}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^{\alpha}\left(\ln\left(\frac{1}{\beta}\right)+\ln(x_i)\right) - \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) - n\ln\left(\frac{1}{\beta}\right)} \tag{4.11}$$

selanjutnya,

$$\frac{\partial l}{\partial \beta} = \frac{-n\alpha}{\beta} + \frac{\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\alpha}\alpha\sum_{i=1}^{n}(x_i)^{\alpha}}{\beta} = 0$$

$$n - \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\alpha}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^{\alpha} = 0$$

$$\frac{1}{\beta^{\alpha}}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^{\alpha} = n$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i)^{\alpha} = n\,\beta^{\alpha}$$

$$\beta = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}} \tag{4.12}$$

b. Distribusi Pareto

Parameter dari fungsi kepadatan peluang Pareto (α, k) pada persamaan (2.15) dapat ditunjukkan sebagai berikut :

$$f(x, \alpha, k) = \frac{\alpha k^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}; \quad k \le x < \infty; \ \alpha, k > 0$$

maka fungsi *likelihood* :

$$L = f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n)$$

$$= \frac{\alpha k^{\alpha}}{{x_1}^{\alpha+1}} + \frac{\alpha k^{\alpha}}{{x_2}^{\alpha+1}} + \ldots + \frac{\alpha k^{\alpha}}{{x_n}^{\alpha+1}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha k^{c}}{{x_i}^{\alpha+1}} \tag{4.13}$$

Setelah diperoleh fungsi *likelihood*, selanjutnya akan ditentukan maksimum *likelihood* dari persamaan di atas dengan menjadikan fungsi *likelihood* tersebut menjadi logaritma *likelihood*, yaitu :

$$l = \ln L$$

$$= \ln\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha k^{c}}{{x_i}^{\alpha+1}}\right)$$

$$l = \ln\ \alpha^n + \ln\ (k^\alpha)^n + \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{x_i^{\alpha+1}}\right)$$

$$= n \ln \alpha + \alpha n \ln k - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \qquad (4.14)$$

karena,

$$\frac{\partial(\alpha;X)}{\partial \alpha} = 0$$

sehingga,

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + n \ln k - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) = 0$$

$$\frac{n}{\alpha} = -n \ln k + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$$

$$\alpha = \frac{n}{-n \ln k + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)}$$

$$\alpha = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{k}\right)} \qquad (4.15)$$

Selanjutnya, untuk parameter *k* dalam distribusi Pareto tidak perlu diturunkan dari fungsi *likelihood* yang telah dimaksimumkan dengan fungsi logaritma, karena parameter *k* merupakan nilai yang terkecil dari x_i pada data. Maka dapat ditulis sebagai berikut :

$$k = \min(x_i) \qquad (4.16)$$

dengan,

x_i adalah data

4.3 Menentukan Nilai Parameter

Setelah diperoleh persamaan parameter dari distribusi Weibull dan Pareto, akan ditentukan nilai parameter tersebut dari data tinggi gelombang tsunami sebagaimana yang terdapat pada Lampiran A.

a. Distribusi Weibull

Nilai parameter dari distribusi Weibull diperoleh dengan cara menggunakan metode Newton-Raphson untuk menghampiri nilai parameternya, karena metode Newton-Raphson memerlukan nilai awal, maka terlebih dahulu akan dicari nilai awal dengan menghampiri fungsi kumulatifnya pada persamaan (2.9), yaitu :

$$F(x, \alpha, \beta) = 1 - e^{-\left(x/\beta\right)^{\alpha}}$$

misalkan :

$$\lambda = \frac{1}{\beta}$$

sehingga,

$$F(t) = 1 - e^{-(\lambda t)^{\alpha}}$$

$$e^{-(\lambda t)^{\alpha}} = 1 - F(t)$$

$$\left[e^{-(\lambda t)^{\alpha}}\right]^{-1} = [1 - F(t)]^{-1}$$

$$e^{(\lambda t)^{\alpha}} = \frac{1}{1 - F(t)}$$

$$\ln\left(e^{(\lambda t)^{\alpha}}\right) = \ln\left(\frac{1}{1 - F(t)}\right)$$

$$(\lambda t)^{\alpha} = \ln\left(\frac{1}{1 - F(t)}\right)$$

$$\ln(\lambda t)^{\alpha} = \ln\left(\ln\left(\frac{1}{1 - F(t)}\right)\right)$$

$$\alpha \ln(\lambda t) = \ln\left(\ln\left(\frac{1}{1 - F(t)}\right)\right)$$

$$\alpha \ln t = \alpha \ln(\lambda)^{-1} + \ln\left(\ln\left(\frac{1}{1 - F(t)}\right)\right)$$

$$\ln t = \frac{\alpha \ln\frac{1}{\lambda} + \ln\left(\ln\left(\frac{1}{1 - F(t)}\right)\right)}{\alpha}$$

$$\ln t = \ln\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\alpha}\ln\left(\ln\left(\frac{1}{1 - F(t)}\right)\right) \tag{4.17}$$

persamaan di atas membentuk persamaan regresi linier sederhana, yaitu :

$$y = a + b\,x$$

dengan menggunakan nilai hampiran $F(t) = \frac{i - 0.5}{n}, i = 1,2, \dots, n$

misalkan :

$$y = \ln t$$

$$a = \ln\frac{1}{\lambda}$$

$$b = \frac{1}{\alpha}$$

$$x = \ln\left(\ln\left(\frac{1}{1 - F(t)}\right)\right)$$

Selanjutnya akan dicari nilai *a* dan *b* dengan menggunakan persamaan regresi linier untuk memperoleh nilai awalnya, yaitu :

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$a = \bar{y} - b\,\bar{x}$$

Oleh karena perhitungannya yang cukup rumit, maka untuk mempermudah proses perhitungan dibuat tabel perhitungan pada Lampiran B. Berdasarkan hasil yang diperoleh pada Lampiran B, maka diperoleh :

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \frac{82,449}{163,889} = 0,50308$$

dan,

$$a = \bar{y} - b\,\bar{x}$$

$$= 2,234 - (0,50308)(-0,526)$$

$$= 2,4986$$

Sehingga nilai parameter awalnya adalah :

$$a = \ln\frac{1}{\lambda}$$

$$= \ln\beta$$

$$\beta^0 = e^a = e^{2.4986} = 12,165$$

dan,

$$b = \frac{1}{\alpha}$$

$$\alpha^0 = \frac{1}{b} = \frac{1}{0.50308} = 1,987$$

Setelah diperoleh nilai parameter awal, kemudian dilanjutkan dengan mencari nilai hampiran parameter α dan β menggunakan metode Newton-Raphson dengan iterasi seperti pada persamaan (2.23), yaitu sebagai berikut :

$$x_1^{k+1} = x_1^{k} - \left(b_{11}^{\ k} f_1^{\ k} + b_{12}^{\ k} f_2^{\ k} + \cdots + b_{1p}^{\ k} f_p^{\ k}\right)$$

$$x_2^{k+1} = x_2^{k} - \left(b_{21}^{\ k} f_1^{\ k} + b_{12}^{\ k} f_2^{\ k} + \cdots + b_{2p}^{\ k} f_p^{\ k}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_p^{k+1} = x_p^{k} - \left(b_{p1}^{\ k} f_1^{\ k} + b_{p2}^{\ k} f_2^{\ k} + \cdots + b_{pp}^{\ k} f_p^{\ k}\right)$$

- Iterasi Pertama

Terlebih dahulu akan ditentukan nilai $f_1^{\ 0}$ dan $f_2^{\ 0}$ dengan cara menggunakan turunan parsial pada fungsi log-*likelihood* pada persamaan (4.10) terhadap dua parameter yang dimilikinya dengan mensubstitukan nilai awal yang telah diperoleh sebelumnya untuk mencari iterasi pertama, yaitu :

$$f_1^{\ 0} \Rightarrow \frac{\partial l}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + n\ln\left(\frac{1}{\beta}\right) + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\alpha} \sum_{i=1}^{n} (x_i)^{\alpha}\left(\ln\left(\frac{1}{\beta}\right) + \ln(x_i)\right)$$

$$= -76{,}31054$$

$$f_2^{\ 0} \Rightarrow \frac{\partial l}{\partial \beta} = n - \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\alpha} \sum_{i=1}^{n} (x_i)^{\alpha} = -62{,}36630$$

selanjutnya dicari matriks Jacobian menggunakan persamaan (2.21), yaitu :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^{\ 0}}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_1^{\ 0}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial f_2^{\ 0}}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_2^{\ 0}}{\partial \beta} \end{bmatrix}$$

dimana,

$$\frac{\partial f_1^{\ 0}}{\partial \alpha} = -\frac{n}{\alpha^2} - \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\alpha} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\ \alpha} \ln\left(\frac{1}{\beta}\right)^2 - 2\left[\left(\frac{1}{\beta}\right)^2 \ln\left(\frac{1}{\beta}\right) \sum_{i=1}^{n} x_i^{\ \alpha} \ln(x_i)\right]$$

$$- \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\alpha} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\ \alpha} \ln(x_i)^2 = -125{,}196$$

$$\frac{\partial f_1^{\ 0}}{\partial \beta} = \frac{-n}{\beta} + \frac{\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\alpha} \alpha \sum_{i=1}^{n} (x_i)^{\alpha} \left(\ln\left(\frac{1}{\beta}\right) + \ln(x_i)\right)}{\beta} + \frac{\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\alpha} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\ \alpha}}{\beta} = 21{,}766$$

$$\frac{\partial f_2^{\ 0}}{\partial \alpha} = -\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\alpha} \ln\left(\frac{1}{\beta}\right) \sum_{i=1}^{n} x_i^{\ \alpha} - \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\alpha} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\ \alpha} \ln(x_i) = -101{,}873$$

$$\frac{\partial f_2{}^0}{\partial \beta} = \frac{\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\alpha} \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i{}^{\alpha}}{\beta} = 27,664$$

sehingga,

$$J = \begin{bmatrix} -125,196 & 21,766 \\ -101,873 & 27,664 \end{bmatrix}$$

dan diperoleh matriks invers dari matriks Jacobian pada persamaan (2.22), yaitu :

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} -0,02220201958 & 0,01746885673 \\ -0,08175928098 & 0,1004775838 \end{bmatrix}$$

sehingga,

$$\alpha^1 = \alpha^0 - \left(b_{11}{}^0 f_1{}^0 + b_{12}{}^0 f_2{}^0\right)$$
$$= 1,38223$$

$$\beta^1 = \beta^0 - \left(b_{21}{}^0 f_1{}^0 + b_{22}{}^0 f_2{}^0\right)$$
$$= 12,19236$$

Setelah diperoleh nilai iterasi pertama, nilai iterasi berikutnya dapat dicari menggunakan langkah-langkah yang sama dengan sebelumnya. Jika dalam melakukan proses iterasi diperoleh nilai yang sama dengan nilai iterasi sebelumnya, maka proses iterasi dihentikan. Untuk mempermudah proses perhitungan, iterasi berikutnya dicari dengan menggunakan *software* Maple dengan hasil yang diperoleh sebagai berikut :

- Iterasi Kedua

  $\alpha^2 = 1,43231$

  $\beta^2 = 13,5347$

- Iterasi Ketiga

  $\alpha^3 = 1,41743$

  $\beta^3 = 13,6034$

- Iterasi Keempat

  $\alpha^4 = 1{,}41740$

  $\beta^4 = 13{,}6054$

- Iterasi Kelima

  $\alpha^5 = 1{,}41740$

  $\beta^5 = 13{,}6054$

Nilai iterasi yang dihasilkan pada iterasi keempat sama dengan nilai iterasi kelima, maka proses iterasi dihentikan.

a. Distribusi Pareto

Nilai parameter α pada distribusi Pareto dapat dicari dengan rumusan parameter yang telah diperoleh sebelumnya pada persamaan (4.15), yaitu :

$$\alpha = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{k}\right)}$$

$$= \frac{107}{120{,}79628} = 0{,}88579$$

dan nilai parameter k dapat dicari dengan menggunakan persamaan (4.16), yaitu :

$$k = \min(x_i)$$

$$= 3{,}02$$

Nilai parameter dari kedua model distribusi juga dapat dilihat pada tabel di bawah ini :

Tabel 4.1 Nilai Parameter dari Kedua Model Distribusi

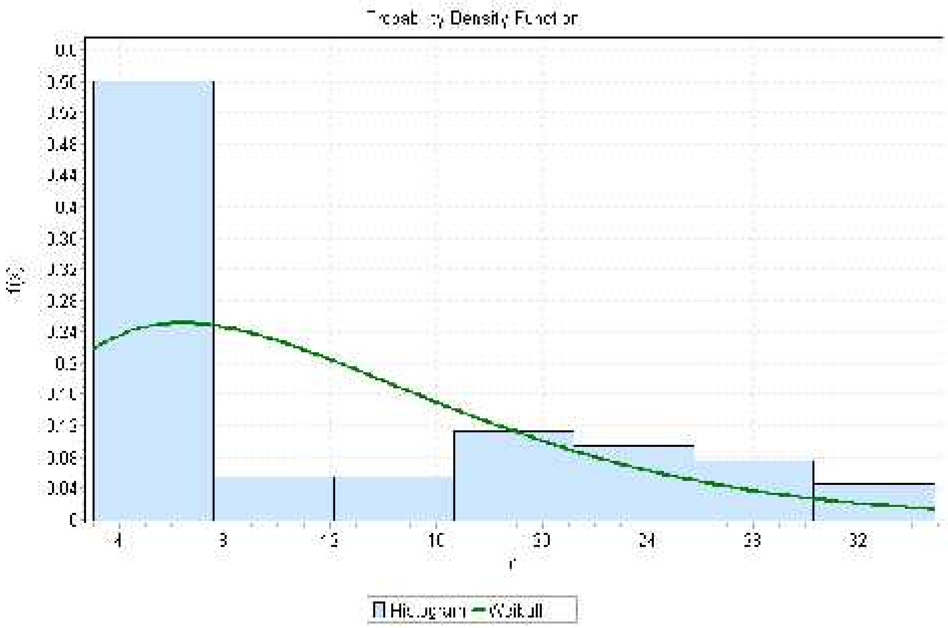
Distribusi	[illegible]	[illegible]
Weibull Dua Parameter	1,486	13,452
Pareto	0,88579	3,02

4.4 Model Distribusi untuk Data Tinggi Gelombang Tsunami di Aceh Tahun 2004

Setelah diperoleh nilai parameter dari kedua distribusi, maka dapat digambarkan model distribusi untuk data tinggi gelombang tsunami di Aceh pada 26 Desember 2004.

a. Distribusi Weibull

Model distribusi Weibull untuk data tinggi gelombang tsunami di Aceh pada 26 Desember 2004 dapat dilihat pada gambar berikut :

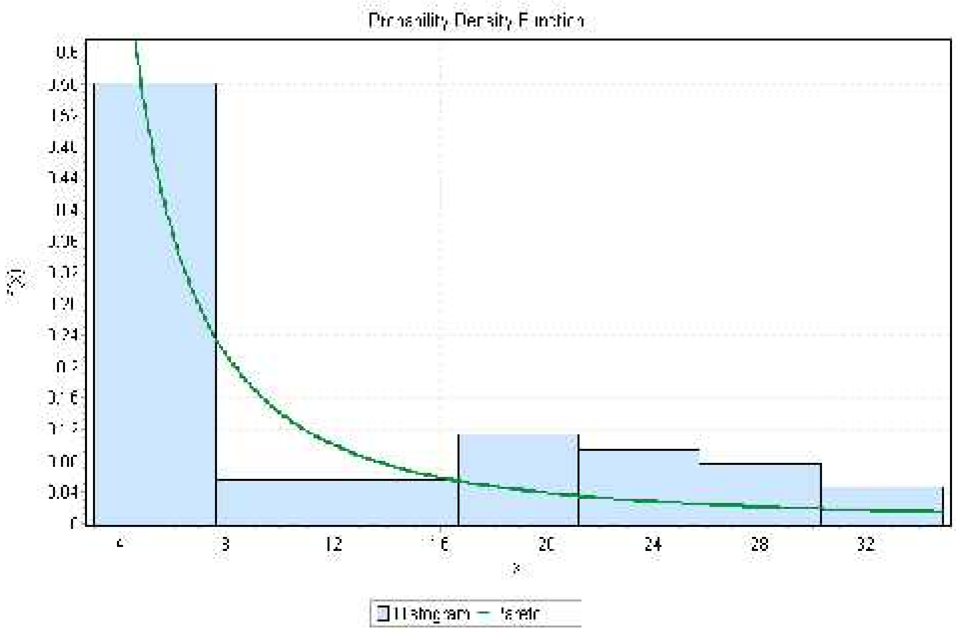


Gambar 4.1 Model Distribusi Weibull untuk Data Tinggi Gelombang Tsunami di Aceh Tahun 2004

Berdasarkan Gambar (4.1) di atas, menunjukkan hubungan antara data tinggi gelombang tsunami di Aceh pada 26 Desember 2004 terhadap fungsi kepadatan peluang distribusi Weibull. Hubungan tersebut membentuk histogram yang belum mendekati kurva normal, sehingga model distribusi Weibull belum sesuai untuk data tinggi gelombang tsunami Aceh pada Tahun 2004.

b. Distribusi Pareto

Berikut ini adalah gambar model distribusi Pareto untuk data tinggi gelombang tsunami di Aceh pada 26 Desember 2004, yaitu :



Gambar 4.2 Model Distribusi Pareto untuk Data Tinggi Gelombang Tsunami di Aceh Tahun 2004

Berdasarkan Gambar (4.2) di atas, menunjukkan hubungan antara data tinggi gelombang tsunami di Aceh pada 26 Desember 2004 terhadap fungsi kepadatan peluang distribusi Pareto. Hubungan tersebut membentuk histogram yang mendekati kurva normal, sehingga model distribusi Pareto sesuai untuk data tinggi gelombang tsunami Aceh pada Tahun 2004.

Pernyataan di atas menunjukkan bahwa, model distribusi yang sesuai untuk data tinggi gelombang tsunami di Aceh adalah model distribusi Pareto, karena histogram yang terbentuk mendekati kurva normal. Selain dapat ditunjukkan dengan gambar di atas, model distribusi yang sesuai juga dapat ditunjukkan dengan melakukan uji kebaikan (*Goodness of Fit*).

4.5 Uji Kebaikan (*Goodness of Fit*)

Uji kebaikan dilakukan untuk memperoleh model distribusi yang sesuai untuk data tinggi gelombang tsunami di Aceh pada 26 Desember 2004. Pada penelitian ini akan digunakan dua uji kebaikan, yaitu uji Kolmogorov-Smirnov dan Anderson-Darling.

4.5.1 Uji Kolmogorov-Smirnov

a. Distribusi Weibull

Uji Kolmogorov-Smirnov untuk distribusi Weibull akan ditunjukkan dengan menggunakan persamaan (2.24), yaitu :

$$D = \max\,[D^+,\ D^-]$$

Terlebih dahulu akan ditunjukkan D^+ dengan menggunakan persamaan (2.25), yaitu :

$$D^+ = \max_{i=1,\dots,n}\left[\frac{i}{n} - F(x_i)\right]$$

$$D^+ = \max_{i=1,\dots,n}\left[\frac{i}{n} - \left(1 - e^{-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}}\right)\right]$$

dengan,

$i = 1,2,\dots\dots,n$

$n = 107$

x_i = data ke *i*

$\alpha = 1{,}486$

$\beta = 13{,}452$

sehingga,

$$D^+ = \max_{i=1,\dots,n}\left[\frac{i}{107} - \left(1 - e^{-\left(\frac{x_i}{13{,}452}\right)^{1486}}\right)\right]$$

$$D^+ = 0{,}23882$$

Selanjutnya, dengan menggunakan persamaan (2.26) akan dicari nilai D^-, sehingga :

$D^- = \max_{i=1,\dots,n}\left[F(x_i) - \frac{(i-1)}{n}\right]$

$D^- = \max_{i=1,\dots,n}\left[\left(1 - e^{-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}}\right) - \frac{(i-1)}{n}\right]$

$D^- = \max_{i=1,\dots,n}\left[\left(1 - e^{-\left(\frac{x_i}{13,452}\right)^{1486}}\right) - \frac{(i-1)}{107}\right]$

$D^- = 0{,}11258$

maka diperoleh :

$D = \max\,[D^+,\ D^-]$

$D = \max\,[0{,}23882,\ 0{,}11258]$

$D = 0{,}23882$

b. Distribusi Pareto

Selanjutnya akan dilakukan uji Kolmogorov-Smirnov untuk distribusi Pareto dengan menggunakan persamaan (2.24), yaitu :

$D = \max\,[D^+,\ D^-]$

Terlebih dahulu akan ditunjukkan D^+ dengan menggunakan persamaan (2.25), yaitu :

$D^+ = \max_{i=1,\dots,n}\left[\frac{i}{n} - F(x_i)\right]$

$D^+ = \max_{i=1,\dots,n}\left[\frac{i}{n} - \left(1 - \left(\frac{k}{x_i}\right)^{\alpha}\right)\right]$

dengan,

$i\ = 1,2,\dots\dots,n$

$n\ = 107$

x_i = data ke *i*

$\alpha\ = 0{,}88579$

$k\ = 3{,}02$

sehingga,

$D^+ = \max_{i=1,\dots,n}\left[\frac{i}{107} - \left(1 - \left(\frac{3{,}02}{x_i}\right)^{0,88579}\right)\right]$

$D^+ = 0{,}11458$

Selanjutnya, perhatikan kembali persamaan (2.26) untuk memperoleh nilai D^-, sehingga :

$$D^- = \max_{i=1,\dots,n}\left[F(x_i) - \frac{(i-1)}{n}\right]$$

$$D^- = \max_{i=1,\dots,n}\left[\left(1-\left(\frac{k}{x_i}\right)^{\alpha}\right) - \frac{(i-1)}{n}\right]$$

$$D^- = \max_{i=1,\dots,n}\left[\left(1-\left(\frac{3{,}02}{x_i}\right)^{0{,}88579}\right) - \frac{(i-1)}{107}\right]$$

$$D^- = 0{,}20930$$

maka diperoleh :

$$D = \max\,[D^+,\ D^-]$$

$$D = \max\,[0{,}11458,\ 0{,}20930]$$

$$D = 0{,}20930$$

Setelah dilakukan uji Kolmogorov-Smirnov, dapat dilihat bahwa hasil uji distribusi Pareto bernilai minimum dibandingkan distribusi Weibull dua parameter. Sehingga model distribusi yang sesuai untuk data tinggi gelombang tsunami di Aceh adalah distribusi Pareto.

4.5.2 Uji Anderson-Darling

a. Distribusi Weibull

Uji Anderson-Darling untuk distribusi Weibull dapat ditunjukkan dengan menggunakan persamaan (2.27), yaitu :

$$A^2 = -n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\begin{bmatrix}(2i-1)\ln F(x_i) + \\ (2n+1-2i)\ln\left(1-F(x_i)\right)\end{bmatrix}$$

maka :

$$A^2 = -n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\begin{bmatrix}(2i-1)\ln\left(1-e^{-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}}\right) + \\ (2n+1-2i)\ln\left(1-\left(1-e^{-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}}\right)\right)\end{bmatrix}$$

dengan,

$i\ = 1,2, \dots\dots, n$

$n = 107$

x_i = data ke i

$\alpha\ = 1,486$

$\beta\ = 13,452$

sehingga,

$$A^2 = -107 - \frac{1}{107}\sum_{i=1}^{n}\left[\begin{array}{c}(2i-1)\ln\left(1-e^{-\left(\frac{x_i}{13,452}\right)^{1.486}}\right)+\\ [2(107)+1-2i]\ln\left(1-\left(1-e^{-\left(\frac{x_i}{13,452}\right)^{1.486}}\right)\right)\end{array}\right]$$

$$A^2 = -107 - \frac{1}{107}(-12169,4)$$

$$A^2 = 6,73288$$

b. Distribusi Pareto

Uji Anderson-Darling juga akan dilakukan untuk distribusi Pareto dengan menggunakan persamaan (2.27), yaitu :

$$A^2 = -n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\begin{array}{c}(2i-1)\ln F(x_i)+\\ (2n+1-2i)\ln(1-F(x_i))\end{array}\right]$$

maka :

$$A^2 = -n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\begin{array}{c}(2i-1)\ln\left(1-\left(\frac{k}{x_i}\right)^{\alpha}\right)+\\ (2n+1-2i)\ln\left(1-\left(1-\left(\frac{k}{x_i}\right)^{\alpha}\right)\right)\end{array}\right]$$

dengan,

$i\ = 1,2, \dots\dots, n$

$n\ = 107$

x_i = data ke i

$\alpha\ = 0,88579$

$k\ = 3,02$

sehingga,

$$A^2 = -107 - \frac{1}{107}\sum_{i=1}^{n}\left[\begin{array}{c}(2i-1)\ln\left(1-\left(\frac{3{,}02}{x_i}\right)^{0.88579}\right)+ \\ [2(107)+1-2i]\ln\left(1-\left(1-\left(\frac{3{,}02}{x_i}\right)^{0.88579}\right)\right)\end{array}\right]$$

$$A^2 = -107 - \frac{1}{107}(-12100{,}2)$$

$$A^2 = 6{,}08633$$

Setelah dilakukan uji Anderson-Darling, hasil yang diperoleh juga menunjukkan bahwa distribusi Pareto bernilai minimum dibandingkan distribusi Weibull dua parameter. Sehingga distribusi Pareto adalah model distribusi yang sesuai untuk data tinggi gelombang tsunami di Aceh.

Hasil uji kebaikan dari kedua model distribusi juga dapat dilihat pada tabel di bawah ini :

Tabel 4.2 Hasil Uji Kebaikan dari Kedua Model Distribusi

Distribusi	Kolmogorov-Smirnov	Anderson-Darling
Weibull Dua Parameter	0,23882	6,73288
Pareto	0,20930	6,08633

Model distribusi dikatakan sesuai untuk data jika hasil uji statistik yang dilakukan pada suatu model distribusi tersebut bernilai minimum. Berdasarkan Tabel (4.2) di atas, distribusi yang memiliki nilai uji kebaikan minimum adalah distribusi Pareto. Sehingga model distribusi yang lebih sesuai untuk data tinggi gelombang tsunami di Aceh ditunjukkan oleh distribusi Pareto.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan sebelumnya dari tugas akhir ini, dapat diambil kesimpulan bahwa model distribusi Pareto lebih sesuai untuk data tinggi gelombang tsunami di Aceh dibandingkan dengan distribusi Weibull dua parameter. Hal ini ditunjukkan oleh model distribusi Pareto yang menunjukkan lebih mendekati kurva normal. Kemudian hasil uji kebaikan (*Goodness of Fit*) Kolmogorov-Smirnov dan Anderson-Darling dari distribusi Pareto menunjukkan nilai minimum dibandingkan dengan distribusi Weibull dua parameter.

5.2 Saran

Tugas akhir ini membahas tentang menentukan model distribusi yang sesuai untuk data tinggi gelombang tsunami di Aceh pada 26 Desember 2004, dengan menggunakan dua distribusi yaitu distribusi Weibull dua parameter dan Pareto. Bagi pembaca yang berminat melanjutkan tugas akhir ini, penulis sarankan untuk menggunakan distribusi statistik yang lain dengan karakteristik yang mendukung untuk data tersebut dalam menentukan model yang sesuai bagi data tinggi gelombang tsunami Aceh Tahun 2004.

DAFTAR PUSTAKA

Choi, B. H., *et. al*. Distribution Functions of Tsunami Wave Heights. *Natural Hazard* 25 : 1-21, 2002.

Dan'azumi, Salisu, *et. al*. Modeling the Distribution of Rainfall Intensity Using Hourly Data. *American Journal of Environmental Sciences* 6 (3) : 238-243, 2010.

E Walpole, Ronald dan Raymond H Mayers. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan*. Bandung : ITB Bandung. 1989.

Husak, G. J., *et. al*. Use of The Gamma Distribution to Represent Monthly Rainfall in Africa for Drought Monitoring Applications. *International Journal of Climatology*, 27 : 935-944, 2007.

J Dudewicz, Edward dan Satya N Mishra. *Modern Mathematical Statistics*. John Wiley and Sons, Inc. 1988.

Koutsoyiannis, Demetris. On The Appropriateness of The Gumbel Distribution in Modelling Extreme Rainfall. *Proceedings of the ESF LESC Exploratory Workshop Held at Bologna*, *Italy*, October 24-25, 2003.

Krishnamoorthy, K. *Handbook of Statistical Distributions with Applications*. Chapman & Hall/CRC. 2006.

Lee, E. T., Wang, J. W. *Statistical Methods for Survival Data Analysis*. 3nd ed. John Wiley & Son, Inc. 2003.

Mojfeld, H. O. Forecasting the Heights of Later Wave in Pacific-Wide Tsunamis. *Natural Hazard* 22 : 71-89, 2000.

Pani, Ari. Model Statistik untuk Data Karbon Monoksida (CO). *Prosiding Simposium Kebangsaan Sains Matematik, Fakulti Sains, Universiti Putra Malaysia* : 17, 2009.

Prager, E. J., *et. al*. *Sains dan Sifat Gempa Bumi, Gunung Berapi, dan Tsunami*. Pakar Karya : Bandung. 2006.

Thode, H. C. *Testing for Normality*. Marcel Dekker. Inc. 2002.

Rinne, H. *The Weibull Distribution A Handbook*. Chapman & Hall/CRC. 2009.

Rousas, George. *An Introduction to Probability and Statistical Inference*. Academic Press. 2003.

Sulaiha, Jamaludin, *et. al*. Fitting Daily Rainfall Amount in Malaysia Using the Normal Transform Distribution. *Journal of Applied Sciences* 7 (14) : 1880-1886, 2007.

Yendra, Rado, dkk. *Analisis Survival dan Program R*. Yayasan Pusaka Riau : Pekanbaru. 2010.

Zaharim, Azami, *et*, *al*. Fitting of Statistical Distributions to Wind Speed Data in Malaysia. *Europian Journal of Scientific Research* Vol 1 : pp 6-12, 2009.

Zaharim, Azami, *et*, *al*. The Suitability of Statistical Distribution in Fitting Wind Speed Data. *WSEAS Transactions on Mathematics*, Vol 7, 2008.